01 OM: Hilfsmittelfreie Fertigkeiten im Umgang mit Termen in der Oberstufe

Im Kerncurriculum „wird in den prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen nur dann explizit sowohl auf den Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge als auch auf hilfsmittelfrei zu erwerbende Kompetenzen hingewiesen, wenn Abgrenzungen deutlich werden sollen. Fehlen diese Hinweise, ist der hilfsmittelfreie Erwerb der Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten in einem angemessenen Umfang intendiert.“ [1]

Im Folgenden wird an Beispielen die Komplexität beschrieben, die jeder Schüler ‚im Kopf‘ bzw. ‚zu Fuß‘ (also durch Notation von Zwischenschritten) ohne Hilfsmittel können sollte. Die Beispiele ‚im Kopf‘ bilden ein Repertoire von sicher beherrschten Techniken, die bei den Beispielen ‚zu Fuß‘ dann sicher abgerufen werden können. Die Grenzen sind fließend.

Im Onlinematerial „Elementare Termumformungen“ sind ergänzend zum „Kerncurriculum für das Gymnasium, Schuljahrgänge 5 – 10“ die am Ende von Schuljahrgang 10 zu erreichenden hilfsmittelfreien Fertigkeiten dargestellt. Diese werden hier vorausgesetzt und im Anhang dargestellt.

Aspekte wie die Berechnung eines Skalarproduktes oder eines Erwartungswertes sind in der nachfolgenden Tabelle nicht aufgeführt, da dabei keine neuen Rechenfertigkeiten oder keine Notwendigkeit zur Abgrenzung hinsichtlich der Komplexität besteht. Die Tabelle stellt außerdem keine Sammlung auswendig zu kennender Formeln dar.

Im Unterricht werden Lerninhalte „durch geeignete Wiederholungen und Übungen aus dem Kontext der Erstbegegnung gelöst und an geeigneten Stellen des gesamten Mathematikunterrichts geübt. Regelmäßige Kopfübungen sind ein bewährter, sinnvoller Weg. Übungs- und Wiederholungsphasen sollten über den aktuellen Lernbereich hinaus vernetzend sein.“ [2] Es kann sinnvoll sein, in Übungen auch über die hier beispielhaft benannte Komplexität hinauszugehen.

Einführungsphase		
Thema	‚im Kopf‘	‚zu Fuß‘
Ableitungen	$f(x)=x^n; n\in\{1,2,...\}$ $f(x)=a_n\cdot x^n+....+a_1\cdot x+a_0;$ $n\in\mathbb{N}; a_i\in IR$ $f(x)=\sin(x)$ $f(x)=\cos(x)$	$f(x)=x^n; n\in\{-1,-2,...\}$ $f(x)=\sqrt{x}$ $f(x)=a_n\cdot x^n+....+a_1\cdot x+a_0;$ $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}; a_i\in IR$
Gleichungen	Zusätzlich zu den im Onlinematerial „elementare Termumformungen“ zum „Kerncurriculum für das Gymnasium, Schuljahrgänge 5 – 10“ aufgeführten Beispielen:	
	$b\cdot(x-a_n)\cdot...\cdot(x-a_1)=0$ $b\cdot(x-a_2)^2\cdot(x-a_1)=0$ mit $b, a_n,...,a_1\in IR$	

[1] s. Kerncurriculum für das Gymnasium – gymnasiale Oberstufe, die Gesamtschule – gymnasiale Oberstufe, das Berufliche Gymnasium, das Abendgymnasium, das Kolleg 2017, Kapitel 2.1 Kompetenzerwerb im Mathematikunterricht

[2] s. Kerncurriculum für das Gymnasium, Schuljahrgänge 5-10 2013, Kapitel 2.2 Kompetenzentwicklung

01 OM: Hilfsmittelfreie Fertigkeiten im Umgang mit Termen in der Oberstufe

Qualifikationsphase		
Thema	‚im Kopf‘	‚zu Fuß‘
Gleichungen	Zusätzlich zu den im Onlinematerial „elementare Termumformungen“ zum „Kerncurriculum für das Gymnasium, Schuljahrgänge 5 – 10“ aufgeführten Beispielen:	
	$e^{x}=2$ $e^{3\cdot x}=2$ $(x-2)\cdot e^{3\cdot x}=0$	$2\cdot e^{3\cdot x}=6$ $e^{2\cdot x+1}=2$ $3\cdot e^{x}+4=e^{x}$ $(x+2)\cdot e^{x}=3\cdot e^{x}$ $(x^4+x^3)\cdot e^{x}=0$ $\ln(e^2-x)=0$
		im eA zusätzlich: $(x^4+x^3)\cdot e^{x}=0$ $e^{2\cdot x^2-4}=2$ $\sqrt{x-5}=0$ $\sqrt{x^2-1}=0$
Gleichungssysteme	Zusätzlich zu den im Onlinematerial „elementare Termumformungen“ zum „Kerncurriculum für das Gymnasium, Schuljahrgänge 5 – 10“ aufgeführten Beispielen:	
		$\left\lvert\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2\cdot x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}\right\rvert$
Ableitungen	$f(x)=e^{x}$ $f(x)=a\cdot e^{b\cdot x}+c\,;\,a,b,c\in IR$	$f(x)=a^{x}$ $f(x)=x^2+2\cdot x+e^{2\cdot x}$ $f(x)=(x^3+2)\cdot e^{5\cdot x+1}$ $f(x)=(1-x)^9$ $f(x)=x^2\cdot\sin(x)$
	im eA zusätzlich: $f(x)=\ln(x)$	im eA zusätzlich: $f(x)=x^3\cdot e^{5\cdot x^3+1}$ $f(x)=(1-x^2)^9$ $f(x)=x\cdot\sin(2\cdot x^2-\pi)$

01 OM: Hilfsmittelfreie Fertigkeiten im Umgang mit Termen in der Oberstufe

Qualifikationsphase		
Thema	‚im Kopf'	‚zu Fuß'
Stammfunktionen	$f(x)=x^n;\ n\in\{1,2,...\}$ $f(x)=a_n\cdot x^n+....+a_1\cdot x+a_0;\ n\in IN;\ a_i\in IR$ $f(x)=\sin(x)$ $f(x)=\cos(x)$ $f(x)=e^x$ $f(x)=a\cdot e^{b\cdot x}+c\ ;\ a,b,c\in IR$	$f(x)=x^n;\ n\in\{-1,-2,...\}$ $f(x)=a_n\cdot x^n+....+a_1\cdot x+a_0;\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\};\ a_i\in IR$ $f(x)=\frac{2}{x^2}$ $f(x)=\sqrt{5\cdot x-1}$
	in eA zusätzlich: $f(x)=\frac{1}{x}$	
Integrale	$\int_1^5 3\,dx$ $\int_1^5 x\,dx$	$\int_{-1}^{2}(2\cdot x^3+1)\,dx$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2\cdot x))\,dx$
Binomialkoeffizienten	$\binom{n}{0};\binom{n}{1};\binom{n}{n};\binom{n}{n-1}$	

Schuljahrgänge 5 - 10		
Thema	‚im Kopf‘	‚zu Fuß‘
Grundrechenarten Bruchterme	$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ $2-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}-\frac{3}{7}$ $\frac{1}{6}+\frac{7}{3}-\frac{11}{12}$
	$\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}$	$\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{35}$
	$\frac{2}{3}:4$ $\frac{5}{6}:\frac{7}{11}$	$\frac{5}{6}:\frac{25}{24}$
Grundrechenarten Zahlterme	$-3+12$ $-3{,}2+13{,}8$	$-3{,}21+13{,}18$
	$3\cdot(-12)$ $2{,}5\cdot(-4)$	$13\cdot 57$ $3{,}5\cdot(-4{,}2)$
	$12:(-3)$	$420:15$ $50{,}4:12$
Terme zusammenfassen	$8\cdot a+2\cdot b-a-4\cdot a+b$ $a-a^2+5\cdot a+3\cdot a^2$	
Distributivgesetz Ausklammern	$4\cdot(3\cdot a+5\cdot b)$ $-3\cdot(x-5\cdot y)$ $x^2-5\cdot x$ $16\cdot x-12\cdot x^2$	$2\cdot a\cdot\left(2{,}5\cdot a\cdot b-5\cdot a\cdot b^2\right)$ $-5\cdot a\cdot\left(6\cdot b-0{,}5\cdot a^2\cdot b\right)$
Summen multiplizieren		$(3\cdot a-b)\cdot(4\cdot b+2a)$
Binomische Formeln als Spezialfall Faktorisieren	$(2\cdot a-b)^2$ $x^2-8\cdot x+16=0$ $x^2+x+\frac{1}{4}=0$	

Schuljahrgänge 5 - 10		
Thema	‚im Kopf‘	‚zu Fuß‘
Lineare Gleichungen	$3 \cdot x = 8$ $8 = -3 \cdot x$ $3 \cdot x + 4 = 8$ $\frac{1}{4} \cdot x = -3$	$x + 5 = \frac{1}{3} \cdot x - 7$ $6 \cdot x + 4 = \frac{1}{2} \cdot x - 7$ $-10 + x = x - 1$ $2 \cdot x - 3 = a$
Verhältnisgleichungen	$\frac{x}{3} = \frac{1}{2}$ $\frac{x}{5} = -4$	$\frac{x+4}{3} = \frac{1}{2}$ $\frac{3}{x} = \frac{4}{7}$ Gleichungen der Form $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nach allen Parametern auflösen.
Lineare Gleichungssysteme	$x = y + 1$ $y + x = 5$	$3 \cdot x - 8 = 2 \cdot y$ $-4 \cdot x + y = -9$
quadratische Gleichungen	$x^2 - 5 \cdot x = 0$ $3 \cdot (2 \cdot x - 1) \cdot (2 + x)$ $=0$	$(x+2)^2 - 5 = 0$ $2 \cdot x^2 + 6 \cdot x = 0$ $3 \cdot x^2 - 18 = 0$
	$x^2 - 81 = 0$ $x^2 - 8 = 0$	$x^2 - 2x + 5 = 0$
Wechsel zwischen den Darstellungsformen bei quadratischen Funktionen	$f(x) = x^2 + 8 \cdot x$ wechseln zu $f(x) = x \cdot (x + 8)$ und umgekehrt $f(x) = x^2 - \frac{3}{4} \cdot x$ wechseln zu $f(x) = x \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right)$ und umgekehrt	$f(x) = x^2 - 5 \cdot x + 1$ wechseln zu $f(x) = (x - 2{,}5)^2 - 5{,}25$ und umgekehrt $f(x) = (x-5) \cdot (x+1)$ wechseln zu $f(x) = x^2 - 4 \cdot x - 5$ und umgekehrt $f(x) = (x-2)^2 - 5$ wechseln zu $f(x) = \left(x - 2 - \sqrt{5}\right) \cdot \left(x - 2 + \sqrt{5}\right)$ und umgekehrt

Schuljahrgänge 5 - 10		
Thema	‚im Kopf'	‚zu Fuß'
Potenzgesetze	$(-2)^3$ 2^{-3} $a^3 \cdot a^6$ $a^4 \cdot b^4$ $a^{-3} \cdot a^6$ $3{,}45 \cdot 10^{-3}$	Terme, die nicht über die Komplexität kontextgebundener Terme hinausgehen
	$a^4 : a^7$ $a^3 : b^3$ $a^5 : a^{-3}$	
	$\left(a^4\right)^5$ $\left(2^n\right)^3$	
Exponentialgleichungen	$2^{x+1} = 64$	$3^{4 \cdot x - 5} = 27$
Wurzelgesetze	$4 \cdot \sqrt{3} + 5 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3}$ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ $\sqrt{\frac{49}{25}}$ $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$	Teilweises Radizieren $\sqrt{18}$ $\left(4 \cdot \sqrt{2}\right)^2$